O metodzie geometrycznej ...

dokończenie ze str. 3

zbiorów, zwanych *okresowymi segmentami izolującymi*, zawartych w rozszerzonej przestrzeni fazowej równania. Główny wynik stanowi równość *indeksu punktu stałego* (czyli pewnego rodzaju „miernika” ilości punktów stałych) odwzorowania „po czasie T” (zwanego *odwzorowaniem Poincaré'go*) w punktach początkowych rozwiązań okresowych znajdujących się wewnątrz segmentu izolującego i tak zwanej *liczby Lefschetza odwzorowania monodromii*, będącej niezmiennikiem topologicznym segmentu. W szczególności, jeżeli liczba Lefschetza jest różna od zera, to równanie posiada rozwiązanie T-okresowe.

fot. z archiwum Autora

Główne zastosowana metody geometrycznej dotyczą równań, w których prawa strona jest wielomianem o współczynnikach okresowych. W pracach [9,10] uzyskano szereg ogólnych twierdzeń dla tej klasy równań. Wynika z nich, na przykład, że równania

$$\dot{z}=\bar{z}^2+e^{it},\quad \dot{z}=e^{it}\bar{z}^2+\bar{z},\quad \dot{z}=e^{it}\bar{z}^2+z$$

(w zapisie używającym liczb zespolonych) posiadają, kolejno rozwiązanie 2π-okresowe, niezerowe rozwiązanie 2π-okresowe i niezerowe rozwiązanie 6π-okresowe. Niektóre z tych twierdzeń zostały później uogólnione za pomocą innych metod (np. [2,3]). Dalsze zastosowania znajdują się, między innymi, w napisanej wraz z Tomaszem Kaczyńskim pracy [1], w której uzyskano wyniki dotyczące równań, w których prawe strony są funkcjami wymiernymi o współczynnikach okresowych oraz w pracy [7], wspólnej ze Stanisławem Sędziwym, na temat istnienia rozwiązań okresowych równań wyższych rzędów. Wyniki dotyczące metody geometrycznej zostały zebrane w mającej charakter preprintu monografii [8], przed ukazaniem się drukiem wspomnianych powyżej publikacji.

Metoda geometryczna została też zastosowana w pracach na temat istnienia chaosu. Wzmożone zainteresowanie teorią chaotycznych układów dynamicznych datuje się od połowy lat 1970., gdy w środowisku matematycznym zainteresowano się wynikami numerycznych symulacji przeprowadzonych dekadę wcześniej przez Eduarda Lorenza. Najbardziej znane metody dowodzenia istnienia chaosu w układach generowanych przez równania różniczkowe (np. metody Milenikowa i Szilnikowa) są oparte na badaniu specjalnego typu trajektorii (zwanych *trajektoriami homoklinicznymi*). W ciągu ostatnich kilkunastu lat, w pracach Mariana Mrozka, Konstantina Mischaikowa, Piotra Zgliczyńskiego i innych, pojawiły się komputerowo wspierane dowody szeregu wyników dotyczących chaosu w klasycznych układach (Lorenza, Rösslera itp.).

W pracy [11] zostały zaanonsowane dwa twierdzenia na temat wykrywania dynamiki chaotycznej odwzorowania Poincaré'go. W pierwszym z nich dla uzyskania chaosu zakłada się istnienie okresowych segmentów izolujących o rozłącznych przekrojach dla pewnego parametru czasowego oraz zakłada się specjalną postać tych przekrojów. Drugie, łatwiejsze w weryfikacji i przez to ważniejsze, jest wynikiem współpracy z Klaudiuszem Wójcikiem, a jego dowód został opublikowany w pracy [12]. Twierdzenie to także przedstawia warunki gwarantujące istnienie dynamiki chaotycznej. Warunki te dotyczą odwzorowań monodromii skojarzonych z dwoma segmentami, z których jeden jest zawarty w drugim. Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że równanie

$$\dot{z}=(1+e^{i\Phi t}\,|z|)\,\bar{z}^2 \tag{2}$$

generuje dynamikę chaotyczną w zakresie parametrów $0<\Phi\leq 1/288$. Jak się wydaje, jest to jeden z pierwszych przykładów równań, dla którego bez użycia komputerów podano konkretny zbiór parametrów, dla których występuje chaos (w przeciwieństwie do wyników opartych np. na twierdzeniu Mielnikowa, w których istnienie chaosu jest udowodnione dla małych perturbacji pewnych równań, bez sprecyzowania zakresu tych perturbacji).

Wyniki dalszych badań związanych z wykrywaniem chaosu, opierających się na istnieniu segmentów izolujących, ukazały się, między innymi, w pracach [5,6,13]. W serii prac [14] uzyskano szereg nowych twierdzeń uogólniających wyniki pracy [12], w szczególności rozszerzających zakres parametru Φ, dla którego równanie (2) generuje dynamikę chaotyczną. Najnowsze wyniki na temat tego równania, uzyskane ze wspomaganiem komputerowym, opublikowano w pracy [4].

ROMAN SRZEDNICKI

Literatura:

[1] T. Kaczyński, R. Srzednicki. *Periodic solutions of certain planar rational equations with periodic coefficients*. Differential Integral Equations 7 (1994) 37–47.

[2] R. Manásevich, J. Mawhin, F. Zanolin. *Periodic solutions of complex-valued differential equations and systems with periodic coefficients*. J. Differential Equations 126 (1996) 355–373.

[3] J. Mawhin. *Periodic solutions of some planar non-autonomous polynomial differential equations*. Differential Integral Equations 7 (1994) 1055–1061.

[4] M. Mrozek, R. Srzednicki. *Topological approach to rigorous numerics of chaotic dynamical systems with strong expansion of error bounds*. Found. Comput. Math. 10 (2010) 191–220.

[5] L. Pieniążek. *On detecting of chaotic dynamics via isolating chains*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 22 (2003) 115–138.

[6] L. Pieniążek. *Isolating chains and chaotic dynamics in planar nonautonomous ODEs*. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 54 (2003), 187–204.

[7] S. Sędziwy, R. Srzednicki. *On periodic solutions of certain n-th order differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 196 (1995) 666–675.

[8] R. Srzednicki. *A geometric method for the periodic problem in ordinary differential equations*. Séminaire d'Analyse Moderne, no. 22, Université de Sherbrooke 1992, 1–110.

[9] R. Srzednicki. *Periodic and bounded solutions in blocks for time-periodic non-autonomous ordinary differential equations*. Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl. 22 (1994) 707–737.

[10] R. Srzednicki. *On periodic solutions of planar polynomial differential equations with periodic coefficients*. J. Differential Equations (1994) 77–100.

[11] R. Srzednicki. *On geometric detection of periodic solutions and chaos*. F. Zanolin (ed.), Proceedings of the Conference "Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems", CISM Udine, October 2–6, 1995, CISM Courses Lect. 371, Springer-Verlag, Wien, New York 1996, 197–209.

[12] R. Srzednicki, K. Wójcik. *A geometric method for detecting chaotic dynamics*. J. Differential Equations 135 (1997) 66–82.

[13] K. Wójcik. *Isolating segments and symbolic dynamics*, Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl. 33 (1998) 575–591.

[14] K. Wójcik, P. Zgliczyński. *Isolating segments, fixed point index and symbolic dynamics*. I: J. Differential Equations 161 (2000), 245–288, II: ibid. 172 (2001), 189–211, III: ibid. 183 (2002) 262–278.