Prezentacje polskich uczonych na wiek XXI

O jakościowej teorii równań różniczkowych

fot. Andrzej Kobos

Bardzo ważnym działem matematyki jest teoria równań różniczkowych. Rozważa się tzw. równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe. Równania zwyczajne stosuje się w modelowaniu bardzo wielu procesów fizycznych, w szczególności do opisu ruchu punktów, gdy reguły, zgodnie z którymi badany (opisywany) ruch się odbywa, wyznaczane są przez związki między prędkością a położeniem punktu w danej chwili, zapisywane w postaci równań typu $\dot{z}=f(t,z)$, gdzie $z=z(t)$ jest szukaną funkcją czasu (położeniem rozważanego punktu w chwili t), $\dot{z}$ oznacza jej pochodną, która w przyjętej tu interpretacji kinematycznej jest prędkością badanego punktu, f jest (daną) funkcją określającą prawo, zgodnie z którym odbywa się badany ruch.

Rozwiązaniami są więc funkcje wyznaczające położenie punktu w zależności od czasu. Można powiedzieć, że szukając rozwiązań takich równań szukamy dróg, po jakich poruszają się badane punkty (a także – *implicite* – określamy prędkość ruchu).

Szukanie konkretnych wzorów określających rozwiązania takich równań jest często bardzo trudne. Nierzadko jednak interesują nas nie tyle konkretne wzory, lecz przede wszystkim pewne własności rozwiązań, np. jak ich okresowość, stabilność, ograniczoność, względnie występowanie zachowań chaotycznych. Okazuje się, że przy pewnych założeniach dotyczących funkcji danych w rozważanych zagadnieniach (a więc funkcji f ustalających zależności między prędkością w danej chwili, a położeniem punktu w tej chwili) można stwierdzić, że wśród rozwiązań znajdą się – jakieś – rozwiązania o własnościach np. takich, jak okresowość czy zachowania chaotyczne. Takie zagadnienia wchodzą w zakres tzw. *jakościowej teorii równań różniczkowych*. Jej początki wiąże się z nazwiskami kilku matematyków XIX wieku, przede wszystkim H. Poincaré'go i A.M. Lapunowa. Istotny wkład w rozwój tej teorii wniósł profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, Tadeusz Ważewski, twórca krakowskiej szkoły równań różniczkowych. Jego idee, podjęte przez uczniów, zaowocowały wynikami licznych matematyków (w tym wielu spoza Polski), a wzbogacone przez nowe metody (w tym metody topologii algebraicznej, wzmacniające aparat topologii ogólnej, którą przede wszystkim posługiwał się Ważewski) wróciły do Krakowa niejako „po bardziej zaawansowanych drogach" i są owocnie rozwijane przez „naukowych wnuków" Ważewskiego uzyskujących piękne wyniki. Przykładem takich wyników jest metoda, którą prof. Roman Srzednicki, autor poniższej wypowiedzi na ten temat, nazywa *metodą geometryczną* wykrywania rozwiązań okresowych, a także – co jest niejako komplementarne – zachowań chaotycznych.

ANDRZEJ PELCZAR

O metodzie geometrycznej wykrywania istnienia rozwiązań okresowych

ROMAN SRZEDNICKI

Równania różniczkowe zwyczajne to równania postaci

$$\dot{x}=f(t,x), \qquad (1)$$

gdzie f jest „polem prędkości" nieznanej, sparametryzowanej przez „czas" t, krzywej x w „przestrzeni fazowej", która zazwyczaj jest n-wymiarową przestrzenią euklidesową $\mathbf{R}^n$. Służą do matematycznego modelowania procesów zachodzących w przyrodzie, technice i ekonomii, a znajomość ich rozwiązań jest wykorzystywana przy prognozowaniu skutków tych procesów. Niestety, na ogół nie jest możliwe pełne wyprowadzenie wzorów na rozwiązania równań różniczkowych i niezbędne o nich informacje uzyskuje się na drodze numerycznej, co przeważnie wiąże się z niekontrolowanymi niedokładnościami. Z tego powodu ważną rolę odgrywają badania, w których w ścisły matematyczny sposób dowodzi się określonych jakościowych własności rozwiązań, bez wykorzystywania zarówno ich analitycznej postaci jak i numerycznych przybliżeń. Takie badania zostały zapoczątkowane przez Henri Poincaré'go, który jako pierwszy zauważył złożoność i chaotyczność zachowań rozwiązań niektórych równań, skutkującą, między innymi, problemami związanymi ze stabilnością Układu Słonecznego. Jako ważny element jakościowego opisu, Poincaré uznał informację o istnieniu rozwiązań okresowych. Jednym z problemów, wiążącym się z jej uzyskaniem, jest wskazanie warunków, które należy nałożyć na T-okresową ze względu na pierwszą zmienną funkcję f (przy ustalonym $T>0$), by zagwarantować istnienie T-okresowego rozwiązania x równania (1).

Publikacje dotyczące tego problemu (oraz problemów pochodnych, jak oszacowanie liczby poszukiwanych rozwiązań) dla nieliniowych funkcji f opierają się przeważnie na twierdzeniach Jeana Mawhina, związanych z modyfikacjami tzw. *stopnia Leray-Schaudera*, na metodzie *funkcji prowadzących* Marka A. Krasnoselskiego, twierdzeniach o *punkcie stałym* (jak twierdzenie Poincare'go-Birkhoffa), twierdzeniach *o topologicznej transwersalności* Andrzeja Granasa oraz, w przypadku równań drugiego rzędu, na *metodach wariacyjnych*.

W pracy [9] została wprowadzona nowa, geometryczna metoda dowodzenia istnienia rozwiązań problemu. Jej inspiracją było *twierdzenie retraktowe* Tadeusza Ważewskiego, twórcy krakowskiej szkoły równań różniczkowych. Metoda geometryczna opiera się na konstrukcji pewnych

(dokończenie – str. 4)