Trudne piękno matematyki

KRZYSZTOF MAŚLANKA

Kilkadziesiąt tysięcy lat temu nieznani nam ludzie dokonali ważnego odkrycia, które dziś wydaje się tak naturalne. W istocie jednak był to znaczący przełom i początek myślenia abstrakcyjnego. Zauważono mianowicie, że zbiory takie, jak np.: trzy kamienie, troje zwierząt lub trzy wylewy Nilu mają pewną wspólną cechę: ilość, *liczbę*. Jej oddzielenie od samych przedmiotów lub zjawisk sprawiło, że cecha ta zyskała własną osobowość, zdawała się „istnieć" w pewnym świecie, który stopniowo zapełnił się innymi liczbami. Najgłębsza istota owego niematerialnego, pozaczasowego świata do dzisiaj pozostaje przedmiotem dociekań filozofów – i, jak to zwykle w filozofii bywa, chyba pozostanie taką na zawsze, bowiem atrybutem filozofów jest raczej stawiać trudne i głębokie (ale czasem też mętne) pytania, niż na nie skutecznie odpowiadać.

Rola liczb była początkowo czysto praktyczna. Pozwalała np. ponumerować posiadane przedmioty, wyrazić wagę kupionego zboża czy oddać miarę obszaru gruntów uprawnych. Ale z czasem – dzięki starożytnym Grekom – badanie świata liczb zyskało postać metodycznych dociekań i poszukiwania prawd absolutnych, ponadczasowych. Narodziła się teoria liczb, a nieuchwytny – choć skądinąd przecież tak realny! – świat liczb zaczął się powoli zagęszczać. Praktyka wymusiła koncepcję ułamków. Z kolei czystym rozumowaniem pokazano ściśle, że istnieją też liczby, które nie domagają się żadnego zastosowania, liczby zresztą znacznie bardziej powszechne niż ułamki. W geometrii mają one interpretację długości pewnych odcinków i nie można ich wyrazić za pomocą ułamków, a co najwyżej dowolnie dokładnie przybliżyć. Odkrycie to było wielkim zaskoczeniem dla pitagorejczyków (2300 lat temu). Podobno wywołało też przygnębienie, wręcz kryzys w ich filozofii świata, więc postanowiono go nie rozpowszechniać. A potem pojawiły się kolejne rodzaje liczb. Stosunkowo późno Hindusi odkryli zero. W średniowieczu wynikła potrzeba liczb zespolonych, które początkowo traktowano formalnie, wręcz podejrzliwie. W wieku XIX odkryto kwaterniony, dalej liczby algebraiczne, transcendentne, *p*-adyczne…

Podkreślę tu trzy rzeczy, które dla bardziej refleksyjnych matematyków są przejawami piękna ich dziedziny. Po pierwsze: starożytny dowód niewymierności pewnych liczb, np. pierwiastka kwadratowego z dwójki pozostaje do dziś, bez żadnych zmian, przytaczany w podręcznikach jako wzorcowy przykład dowodu nie wprost, mówiąc dostojnie: *reductio ad absurdum*. Prawdy matematyczne, choć dla wielu zimne i bezduszne, mają jednak absolutną trwałość. Raz dowiedzione pozostają niewzruszone. W otaczającym nas świecie pełnym konwencji, przemijającej mody, politycznej poprawności czy – mówiąc wprost – koniunkturalnej obłudy, fakt ten zdecydowanie zasługuje na chwilę zadumy.

Z moich astronomicznych czasów pamiętam, jak odruchowo sprawdzano zawsze, czy dany artykuł jest sprzed paru dni („można go przejrzeć"), sprzed roku („stary"), czy sprzed paru lat („prawdopodobnie nieaktualny"). W matematyce tymczasem odkrycia zarówno Eulera, jak i Euklidesa są wiecznie młode. Może, co najwyżej, język, w którym je oryginalnie wyrażono, bywa egzotyczny (łacina, greka), ale nie jest to przecież bariera nie do pokonania.

I druga uwaga, która nie brzmi zbyt atrakcyjnie: matematyka uczy pokory. Może nie tej moralnej czy chrześcijańskiej. Historia nauki dowodzi jednak wyraźnie, że w matematyce, w przeciwieństwie do wielu innych dziedzin ludzkiej działalności, nie jest możliwe systematyczne planowanie odkryć. (Stąd tak nielogiczny jest w matematyce, a modny obecnie system grantów, zwłaszcza długoterminowych.) Znana poetycka maksyma „Mierz siły na zamiary, nie zamiar podług sił" bardzo szybko okazuje się tu naiwna i nieprzydatna. Analogie do świata fizycznego bywają inspirujące, ale często okazują się złudne, niekiedy wręcz mylące. Czasem matematycy spotykają byty zaskakujące, osobliwe, „niepożądane" – i na pewno nieplanowane. Wyprzedzające epokę odkrycie przez Georga Cantora (1845–1918) liczb pozaskończonych (*transfinite*), a także opór najwybitniejszych matematyków (Leopold Kronecker, Gösta Mittag-Leffler, Henri Poincaré, Hermann Weyl) wobec tych koncepcji przyczyniły się do jego choroby umysłowej. W dodatku Ludwig Wittgenstein zgłosił obiekcje filozoficzne. Trudno się temu dziwić: rewolucyjne wyniki Cantora dotyczące pojęcia nieskończoności były szokujące i ewidentnie sprzeczne z intuicją, która – jak później wyraził się Einstein – jest „ważniejsza od wiedzy". Tyle że w fizyce. Matematyką rządzą inne, bardziej subtelne prawa.

Z kolei znalezienie dziwnych funkcji „wszędzie ciągłych, ale nigdzie nie gładkich" wywołało u niektórych wręcz przygnębienie. Matematyk francuski Charles Hermite (1822–1901) w liście z 20 maja 1893 do przyjaciela, również matematyka, Thomasa J. Stieltjesa (1856–1894) pisał, nie kryjąc negatywnych emocji:

> Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées…
> (Odwracam się ze strachem i grozą od tej godnej pożałowania plagi, czyli funkcji, które nie mają w żadnym punkcie pochodnej…)[1].

Funkcji takich nie można zrealizować w rzeczywistym świecie, np. jako ruchu czy innego przebiegu czasowego. Logicznie rzecz biorąc, wydają się one mało estetyczne, jakby „wybrakowane", po prostu zbędne. Można by odruchowo powtórzyć za fizykiem Izydorem Izaakiem Rabim (1898–1988), który w kontekście „niepotrzebnych" cząstek, tzw. mionów, zapytywał: „A któż to zamawiał?!" (*Who ordered that?!*).

►

[1] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, Gauthier-Villars, Paris 1905, tome II, lettre 274, p. 318.

Matematyka ma jednak niewzruszone podstawy, jest nader żywotna i cierpliwie poucza tych, którym nie brak talentu, cierpliwości oraz – właśnie – pokory. Dziewiętnastowiecznym matematykom dała dobitną lekcję potrzeby ścisłości i rygoru. (To ostatnie słowo, podobnie jak wspomniana pokora, nie brzmi zbyt atrakcyjnie). Opisana powyżej niekomfortowa sytuacja wymusiła m.in. głębsze zrozumienie istoty zbioru funkcji ciągłych, wpłynęła też pozytywnie na rozwój analizy matematycznej. W roku 1861 wielki[2] matematyk niemiecki Karl Weierstrass (1815–1897) znalazł stosowne remedium na wspomnianą „plagę”, gdy pokazał, że jakkolwiek zbiór wszystkich funkcji ciągłych nieuchronnie zawiera przypadki patologiczne, to jednak *każdą* z tych funkcji można *dowolnie dokładnie* przybliżyć tak prostymi i porządnymi funkcjami, jak wielomiany. Słowem pesymizm Hermite’a, choć szczery, okazał się przesadny. Zło okazało się pozorne i wyszło tylko na dobre.

Po trzecie: teoria liczb często zaskakuje matematyków. Jej hipotezy są zwykle sformułowane w sposób zupełnie elementarny i każdy może je zrozumieć. (Jeśli tylko zechce, bo wielu brakuje dobrej woli). Natomiast dowody prawdziwości niektórych hipotez są zwykle późniejsze o kilkadziesiąt lub kilkaset lat, a wymagają bardzo skomplikowanych technik, o których stawiającym te hipotezy nawet się nie śniło. Pewne inne hipotezy są z kolei tak beznadziejnie trudne, że pomimo uporczywego wysiłku całych pokoleń matematyków, nikt nie ma nawet trafnego pomysłu, jak je skutecznie zaatakować (np. hipoteza Riemanna, 1859). Miliardy wykonanych eksperymentów numerycznych mogą „przekonująco” sugerować ogólną prawdziwość tych hipotez. Jednak niejeden raz okazywało się, że to złudzenie[3]. Bowiem wszystkie te, psychologicznie „olbrzymie”, liczby są niczym w porównaniu z atrybutem teorii liczb – *nieskończonością*, która jawnie drwi sobie i z intuicji, i z eksperymentów[4]. Nieskończoności nie ogarnie żaden komputer; poskromić ją może tylko ścisły dowód – efekt czystego rozumowania ludzkiego intelektu. Dopiero wówczas hipoteza zamienia się w twierdzenie i pojawia się niewzruszona pewność.

Czy te pobieżne refleksje zachęcają do studiów nad matematyką? Bądźmy szczerzy: nie. Zapewne niejeden z Czytelników zada sobie w duchu pytanie: – Po co to wszystko? Czy nie lepiej szukać piękna w jego naturalnym środowisku – w sztuce? Albo choćby w kontemplacji kwiatów, krajobrazów, zachodów słońca, gwiaździstego nieba? Czy nie lepiej szukać doznań estetycznych w muzyce, a tajemnicy w religii? Po co komu takie mało spontaniczne, wyrafinowane matematyczne „piękno”?

Nie zamierzam nikogo przekonywać, że wszystko to ma głęboki sens. Byłoby to podobne do tłumaczenia, że muzyka klasyków jest jednak piękna. Kto czuje to piękno, ten nie potrzebuje logicznego uzasadnienia; natomiast temu, kto nie czuje – nie pomogą żadne słowa. Podobnie, czy warto tłumaczyć dobry dowcip komuś, kto usłyszawszy go, konsekwentnie zachowuje grobową powagę?

Można do tego podejść pragmatycznie i postawić proste pytanie. Większość z nas używa poczty komputerowej, kart bankomatowych lub robi przelewy gotówki przez internet. Wszystko to (na ogół) bezpiecznie działa. Nasze listy trafiają do odpowiednich osób, a pieniądze na właściwe konta. Kto jednak wie, że za bezpieczeństwem tych poczynań kryją się twierdzenia dotyczące liczb pierwszych, m.in. wyniki znalezione przez Pierre’a de Fermata (1601–1665), francuskiego prawnika, który po godzinach pracy zajmował się teorią liczb? Ten skryty i małomówny „książę amatorów”, jak trafnie nazwał go szkocko-amerykański historyk matematyki Eric Temple Bell (1883–1960), niczego nie udowodnił, a swe wyniki komunikował zwykle w listach do przyjaciół. Opublikował je pośmiertnie dopiero jego syn Samuel.

Jak zatem widać, matematyka, i to w swej najczystszej postaci, tj. teorii liczb, jest wśród nas, czy sobie z tego zdajemy sprawę, czy nie.

Na koniec świadomie doleję oliwy do ognia i zakończę wyjątkowo szczerym poglądem, który wypowiedział znany matematyk i filozof amerykański, Gian-Carlo Rota (1932–1999):

> Praca matematyka to głównie mieszanina zgadywania, analogii, pobożnych życzeń i frustracji. A dowód nie jest wcale istotą odkrycia; często jest to sposób, by się przekonać, że nasze umysły nie wyprowadzają nas w pole[5].

Wyznanie to burzy schematyczny obraz matematyka, który z natury ma być skrajnie roztargniony („wychodząc z domu całuje jajko na twardo, a żonę stuka łyżeczką w głowę”, „na wykładzie mówi ***a***, myśli ***b***, pisze ***c***, a ma być ***d***”). Co gorsza, wyznanie Roty burzy też oficjalny obraz matematyka, który po przyjściu do pracy z miejsca stawia śmiałą hipotezę, po czym obala ją lub udowadnia, produkując nowe twierdzenie, które następnie stara się wzmocnić lub uogólnić; dalej – referuje wynik kolegom na seminarium, wysłuchuje ich krytycznych komentarzy, pisze artykuł i wysyła go do wysoko punktowanego periodyku, gdzie surowej ocenie podda go renomowany krąg ekspertów, itd.

Tak czy inaczej, w matematyce nie ma żadnego miejsca na – lansowane ostatnio w kręgach wtrącających się do nauki polityków – zalecenia kreatywności, innowacyjności oraz, co podobno najważniejsze, szybkiego i skutecznego wdrażania badań naukowych do bieżących potrzeb gospodarki. Ale to już temat z pewnością zbyt przyziemny, by go tu podejmować.

KRZYSZTOF MAŚLANKA
Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa–Kraków

---

[2] Jerzy Mioduszewski, topolog i historyk matematyki, bardzo nie lubi, gdy matematyków obdziela się umownymi etykietkami: ten wielki, tamten wybitny, ów genialny, jeszcze inny tylko wpływowy. Słusznie. Określenie „wielki” w przypadku Weierstrassa ma jednak naturalne uzasadnienie – był to wysoki, zwalisty mężczyzna. Kiedy w obecności Kroneckera (który był drobnej postury) powiedziano, że Weierstrass jest wielkim matematykiem, ten natychmiast się obraził.

[3] Więcej szczegółów por. Krzysztof Maślanka, *Liczba i kwant*, OBI, Kraków 2004.

[4] Krzysztof Maślanka, *Ćwierć wieku od obalenia hipotezy Mertensa (1985). Refleksje na temat dowodu komputerowego*, Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU, t. V, 2011, s. 19–39; idem, *Matematyka eksperymentalna – kilka refleksji historyka nauki*, Prace Komisji Filozofii Nauk PAU, t. VI, w druku.

[5] Gian-Carlo Rota, *Wstęp*, [w:] Philip J. Davis, Reuben Hersh, *Świat matematyki*, PWN, Warszawa 1994.